CHE-330 Module 5
Correction

Exercice 5.1 :

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \begin{cases} 2\frac{y}{\delta} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 & pour\ 0 \le y \le \delta(x) \\ 1 & pour\ y \ge \delta(x) \end{cases}$$

Il faut déterminer l'expression de $\tau_s(x)$:

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x(v_x - v_\infty)dy$$

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_\infty^2 \left[\left(2\frac{y}{\delta} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right)\left(2\frac{y}{\delta} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 - 1\right)\right] dy$$

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_\infty^2 \left[4\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 - 2\frac{y}{\delta} - 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^6 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^7 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^7 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^8 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right] dy$$

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_\infty^2 \left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^8 - 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^7 + 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^6 + 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 - 9\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + 4\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 2\frac{y}{\delta}\right] dy$$

$$\tau_s(x) = -\frac{d}{dx}\left[\rho v_\infty^2 \delta\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{4}{7} + \frac{2}{3} - \frac{9}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 1\right)\right]$$

$$\boxed{\tau_s(x) = \frac{37}{315}\rho v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}}$$

D'autre part :

$$\tau_s(x) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{2\mu v_\infty}{\delta}$$

$$\frac{2\mu v_\infty}{\delta} = \frac{37}{315}\rho v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

$$\delta\frac{d\delta}{dx} = \frac{630}{37} * \frac{\mu}{\rho v_\infty}$$

En intégrant entre 0 et x :

$$\frac{1}{2}\delta^2(x) = \frac{630}{37} * \frac{\mu}{\rho v_\infty} x$$

$$\boxed{\delta(x) = \sqrt{\frac{1260}{37} * \frac{\mu}{\rho v_\infty} x} = 5.83 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty} x} = 5.83 * \frac{x}{\sqrt{Re_x}}}$$

En remplaçant dans l'expression de $\tau_s(x)$:

$$\tau_s(x) \ = \frac{37}{315} \rho v_\infty^2 * 5.83 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty}} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\tau_s(x) \ = 0.3423 * \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}}}$$

On a donc :

$$C_{T_{loc}}(x) = \frac{\tau_s(x)}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = 0.684 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty x}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{T_{loc}}(x) = 0.684 * \sqrt{\frac{1}{Re_x}}}}$$

<u>Exercice 5.2 :</u>

La valeur exacte de $\tau_s(x)$ a été donnée dans le cours :

$$\tau_s(x) = \frac{1.328}{4} \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}} = 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}}$$

Pour obtenir l'expression de la force de traînée sur l'ensemble de la plaque, il faut intégrer $\tau_s(x)$ sur la surface de la plaque (deux faces) :

$$F_s = 2 * \int_0^H \int_{\frac{B}{2H}x}^{B-\frac{B}{2H}x} \tau_s(x) \, dz \, dx$$

<u>Note</u> : pour une valeur donnée de x comprise entre 0 et H, z est compris entre $\frac{B}{2H}x$ et $B - \frac{B}{2H}x$

$$F_s = 2 * \int_0^H \int_{\frac{B}{2H}x}^{B-\frac{B}{2H}x} 0.332 \sqrt{\frac{\rho\mu v_\infty^3}{x}}\, dz\, dx$$

$$F_s = 0.664 * \sqrt{\rho\mu v_\infty^3} \int_0^H \left(B - \frac{B}{H}x\right) * \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$F_s = 0.664 * \sqrt{\rho\mu v_\infty^3} \left[\int_0^H \frac{B}{\sqrt{x}}\, dx - \int_0^H \frac{B}{H}\sqrt{x}\, dx\right]$$

$$F_s = 0.664 * \sqrt{\rho\mu v_\infty^3} \left[2B\sqrt{H} - \frac{B}{H} * \frac{2}{3} H^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$F_s = 0.664 * \sqrt{\rho\mu v_\infty^3} \left[2B\sqrt{H} - \frac{2}{3}B\sqrt{H}\right]$$

$$\boxed{F_s = 0.885 * B\sqrt{\rho\mu v_\infty^3 H}}$$

D’autre part :

$$\begin{cases} B = 2\sqrt{L^2 - H^2} \\ \dfrac{L}{B} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 2\sqrt{L^2 - H^2} \\ L^2 = \dfrac{1}{4}\left(1 + 2\sqrt{5} + 5\right)B^2 \end{cases}$$

D’où :

$$B = 2\sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + 2\sqrt{5} + 5\right)B^2 - H^2}$$

$$B^2 = \left(1 + 2\sqrt{5} + 5\right)B^2 - 4H^2$$

$$(2\sqrt{5} + 5)B^2 = 4H^2$$

$$\boxed{B = \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{5}+5}}\, H = 0.650\, H}$$

On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{F_s = 0.575 * \sqrt{\rho\mu v_\infty^3 H^3}}}$$

Application numérique :

$$F_s = 0.575 * \sqrt{10^3 * 10^{-3} * 0.1^3 * 0.5^3} = \mathbf{6.428 * 10^{-3}\ N}$$

L'épaisseur de la couche limite est donnée par :

$$\delta(x) = 4.64 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty} x}$$

Au point A :

$$\boxed{\delta(x_A) = 4.64 * \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_\infty}\frac{H}{2}}}$$

Application numérique :

$$\delta(x_A) = 4.64 * \sqrt{\frac{10^{-3} * 0.5}{10^3 * 0.1 * 2}} = \mathbf{7.336\ mm}$$

Exercice 5.3 :

a) La force exercée sur une plaque carrée de côté L est donnée par :

$$F_s^{1\ plaque} = 2 * \int_0^L \int_0^L \tau_s(x)\, dz\, dx = \int_0^L \int_0^L 0.332 \sqrt{\frac{\rho\mu v_\infty^3}{x}}\, dz\, dx$$
$$= 1.328 * \sqrt{\rho\mu v_\infty^3 L^3}$$

b)

$$F_s = 2 * \int_0^{2L} \int_0^{2L} 0.332 \sqrt{\frac{\rho\mu v_\infty^3}{x}}\, dz\, dx$$

$$F_s = 2 * 0.332 * \sqrt{\rho\mu v_\infty^3} * 2L * 2 * \sqrt{2L}$$
$$F_s = 1.328 * \sqrt{\rho\mu v_\infty^3 L^3} * 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F_s = 2\sqrt{2} * F_s^{1\ plaque}}}$$

c)

$$F_s = 2 * \int_0^{4L} \int_0^{L} 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}} \; dz \; dx$$

$$F_s = 2 * 0.332 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3} * L * 2 * \sqrt{4L}$$

$$F_s = 1.328 * \sqrt{\rho \mu v_\infty^3 L^3} * 2$$

$$\boxed{\boldsymbol{F_s = 2 * F_s^{1\,plaque}}}$$